Correction des exercices

Exercice 1

On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + \dots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$$
$$= \frac{n u_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)}{n(n+1)}$$

$\forall n \geq 1, \quad n(n+1) > 0$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n$ est du signe de $n u_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)$.

On étudie deux cas :

- Si (u_n) est croissante alors :

$$u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1}$$

donc $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq n u_{n+1}$

donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$

La suite (v_n) est alors elle aussi croissante

- Si (u_n) est décroissante alors :

$$u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq u_{n+1}$$

donc $\sum_{k=1}^{n} u_k \geq n u_{n+1}$

donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$

La suite (v_n) est alors elle aussi décroissante.

Remarque ; si (u_n) est constante, il existe un réel m tel que $u_n = m$ quel que soit n. La suite (v_n) est alors également constante, tous ses termes sont égaux à m.

Exercice 2

Les termes de cette suite sont strictement positifs

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

A n fixé, la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Donc $n^n \leq (n+1)^n$

$\forall n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la suite (u_n) est par conséquent strictement décroissante.

Exercice 3

La stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$ implique que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ln(n^2+1) > \ln n^2$

Par ailleurs, $\sin\sqrt{n} \geq -1$ quel que soit n.

On déduit que : $\forall n \geq 1$, $v_n \geq 2\ln(n) - \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \to +\infty} 2\ln(n) - \frac{1}{2} = +\infty$$

D'après le théorème 1, on aura : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{2} \times \cdots \times \frac{2}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{k}$$

$\forall k \geq 3$, $\frac{2}{k} \leq \frac{2}{3}$

Ainsi, $\frac{2^n}{n!} \leq 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

$0 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 0$

D'après la proposition 3, on aura $l \leq 0$

Les termes de (u_n) sont positifs, donc $\ell \geq 0$.

Conclusion : $\ell = 0$.

Exercice 5

Chacun des n termes de la somme peut être encadré par des termes indépendants de k.

En effet $\forall 1 \leq k \leq n$, $n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$

D'où
$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

D'où
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 6

1. un exemple de suite convergente non monotone.

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geq 0)$$

2. un exemple de suite bornée divergente.

$$v_n = (-1)^n \quad (n \geq 0)$$

3. un exemple de suite non bornée qui ne tend pas vers $\pm$

$$w_n = n \times \cos(n\pi) \quad (n \geq 0)$$

Exercice 7

1) $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$

2) Montrons que la suite (u_n) est majorée.

$\forall k \geq 2$, $k^2 \geq k(k-1)$

Donc $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

En sommant les membres de cette inégalité, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

or $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$ (une telle somme est appelée somme téléscopique)

Ainsi $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

D'où $u_n \leq 2$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc (u_n) est croissante.

Conclusion : (u_n) est une suite croissante et majorée donc elle converge d'après le théorème 3.

Exercice 8

1) $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

$\forall\ 1+n \leq k \leq 2n$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$

Donc $\sum_{k=1+n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n}$

soit $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que (S_n) converge vers une limite finie l.

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = l - l = 0$$

ce qui contredit l'inégalité précédente.

Si (S_n) était majoré alors (S_n) serait une suite croissante (ce qui se justifie facilement...) et majorée. Elle serait par conséquent convergente. Nous venons de prouver que ce n'est pas le cas.

Ainsi, (S_n) est une suite croissante non majorée

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 9

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$

$= \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$ ($x \mapsto \ln x$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$)

or, si $n < x < n+1$, on a :

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n} \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n}$$ ($[n; n+1]$ est un intervalle de longueur 1)

ce qui établit la stricte décroissance de (u_n).

2) De l'inégalité qui précède, on déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$$

En sommant de 1 à n, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(n+1)$$

Puis :

$$u_n > \ln(n+1) - \ln(n)$$

$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

$= \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) > 0$

conclusion : (u_n) est minorée par 0.

3) (u_n) est une suite décroissante et minorée.

D'après le théorème 3, (u_n) est convergente.

Exercice 10

On a établi à l'exercice précédent que (u_n) est décroissante

De même, on montre que (v_n) est croissante.

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$$
$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$$

On a ainsi prouvé que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et on a :

$$\forall n \geq 1 \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$$

Exercice 11

1) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc (a_n) est croissante.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n}$$
$$= \frac{-1}{(n+1)!(n+1)n} < 0$$

donc (b_n) est décroissante.

2) $b_n - a_n = \frac{1}{n!n}$

$$\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!n} = 0$$

3) (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes.

Elles convergent donc vers le même réel.

4) Si e était un nombre rationnel, il s'écrirait :

$$e = \frac{p}{q} \text{ avec } (p;q) \in \mathbb{N} * \mathbb{N}^*,$$ la limite des suites étant manifestement positive.

Par ailleurs, les suites (a_n) et (b_n) sont strictement monotones, d'où :

$$a_q < e < b_q$$

soit $$a_q < \frac{p}{q} < a_q + \frac{1}{q!q}$$

Ceci implique que :

$$q!q\,a_q < p\,q! < q!q\,a_q + 1$$

Aucun entier n'est strictement compris entre deux entiers consécutifs. Cet encadrement est donc impossible, d'où la contradiction.

Exercice 12

1) Une récurrence immédiate entraîne ce résultat.

2) $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$
$$= \frac{(u_n+v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)}$$
$$= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

D'après 1), $u_n + v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n > 0$

3) $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n}$$ d'où $u_{n+1} - u_n > 0$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$$ d'où $v_{n+1} - v_n < 0$

(u_n) est donc croissante et (v_n) est décroissante, on obtient également $u_0 < u_n < v_n < v_0$

4) (u_n) est une suite croissante et majorée par v_0.

(v_n) est une suite décroissante et minorée par u_0.

Ces deux suites sont donc convergentes.

On note l_1 la limite de (u_n) et l_2 celle de (v_n).

$$\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} v_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{l_1+l_2}{2}$$

Donc :

$$l_2 = \frac{l_1+l_2}{2}$$

Donc $2l_2 = l_1 + l_2$

soit $l_1 = l_2 = l$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

5) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}v_{n+1} = u_n v_n$

donc, par récurrence,

$$u_n v_n = u_0 v_0.$$

$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = l^2$

Donc $l^2 = u_0 v_0$

$l \geq 0$ donc $l = \sqrt{u_0 v_0}$

Exercice 13

Ici, $f(x) = x^2 + 0,1875$

Par récurrence, on obtient facilement que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0,1875$$

Il suffit donc d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = 2x$

Ainsi, $f'(x)$ est positif donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$0,1875$	$\nearrow$	$+\infty$

$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\right)$

$u_1 = u_0^2 + 0,1875$

$u_1 = 0,4375$

Ainsi, $u_0 > u_1$. D'après le théorème 5, la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est minorée (par 0,1875), elle est décroissante. D'après le théorème 3, on déduit qu'elle est convergente.

On note l sa limite.

La fonction f étant continue, sa limite l vérifie $l = f(l)$.

$$l = f(l)$$
$$\iff l^2 - l + 0,1875 = 0$$
$$\iff l = 0,25 \text{ ou } l = 0,75$$

Or, $u_n \leq u_0$ quel que soit n, donc $l \leq u_0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0,25$

Exercice 14

1) $h(x) = x \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0$

L'équation du 2^d degré obtenue admet pour discriminant, $\Delta = (a-d)^2 + 4cb$

Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes

$$\alpha = \frac{a-d+\sqrt{\Delta}}{2c} \text{ et } \beta = \frac{a-d-\sqrt{\Delta}}{2c}$$

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution :

$$\alpha = \frac{a-d}{2c}$$

Sinon, l'équation n'admet aucune solution.

2) a) $\dfrac{h(x)-\alpha}{h(x)-\beta} = \dfrac{h(x)-h(\alpha)}{h(x)-h(\beta)}$ par définition de α et β.

$$= \left(\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}\right) \times \left(\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a\beta+b}{c\beta+d}\right)^{-1}$$

$(ad-bc\neq 0)$ $$= \frac{(ad-bc)(x-\alpha)}{(cx+d)(c\alpha+d)} \times \frac{(cx+d)(c\beta+d)}{(ad-bc)(x-\beta)}$$

$$= \frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\,\frac{x-\alpha}{x-\beta}$$

En posant $k = \dfrac{c\beta+d}{c\alpha+d}$ on obtient le résultat demandé.

b) on raisonne par récurrence sur n

Pour $n=0$, $k^n \dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta} = \dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$

On suppose que, pour un entier $n\geq 0$,

$$k^n \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta} = \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$$

$$\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta} = \frac{h(u_n)-\alpha}{h(u_n)-\beta}$$

$= k\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ d'après 2-a-

$= k \times k^n \dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$$= k^{n+1}\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$$

ce qui établit l'hérédité.

conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k^n \dfrac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$

Remarque, les relations entre les coefficients et les racines d'un trinôme permettent d'établir que

$$k = \frac{a-\alpha c}{a-\beta c}$$

3) a) $\dfrac{1}{h(x)-\alpha} = \dfrac{1}{h(x)-h(\alpha)}$ par définition de α.

$$\frac{1}{h(x)-\alpha} - \frac{1}{x-\alpha} = \frac{(cx+d)(c\alpha+d)-(ad-bc)}{(x-\alpha)(ad-bc)}$$

Il faut justifier que le 2^d membre de cette égalité est une constante. Montrons pour cela que :

$$(cx+d)(c\alpha+d)-(ad-bc) = (x-\alpha)(c^2\alpha+cd) \quad (*)$$

Ce qui revient à montrer que :

$$-c^2\alpha^2 - \alpha c d = cd\alpha + d^2 - ad + bc.$$

- $-c^2\alpha^2 - \alpha c d = \alpha c(-\alpha c - d)$
$$= \frac{1}{2}(2bc - ad + d^2), \text{ car } \alpha = \frac{a-d}{2c}$$

- $cd\alpha + d^2 - ad + bc = cd\,\dfrac{a-d}{2c} + d^2 - ad + bc$
$$= \frac{ad}{2} - \frac{d^2}{2} + d^2 - ad + bc$$
$$= \frac{1}{2}(-ad + d^2 + 2bc)$$

ce qui justifie l'égalité $(*)$

Ainsi, $\dfrac{1}{h(x)-\alpha} - \dfrac{1}{x-\alpha} = k$ avec $k = \dfrac{c(c\alpha+d)}{ad-bc}$

b) On raisonne par récurrence sur n ;

Pour $n=0$, $\dfrac{1}{u_0-\alpha} = \dfrac{1}{u_0-\alpha} + k\times 0$.

On suppose que pour un entier $n \geq 0$ on a $\dfrac{1}{u_n-\alpha} = \dfrac{1}{u_0-\alpha} + kn$.

$$\frac{1}{u_{n+1}-\alpha} = \frac{1}{h(u_n)-\alpha}$$

$$= \frac{1}{u_n-\alpha} + k \quad \text{d'après 3) a)}$$

$$= \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn + k$$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$$= \frac{1}{u_0 - \alpha} + k(n+1)$$

Ce qui établit l'hérédité.

Conclusion, $\forall n \geq 0 \quad \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn$ avec $k = \frac{c(c\alpha+d)}{ad-bc}$